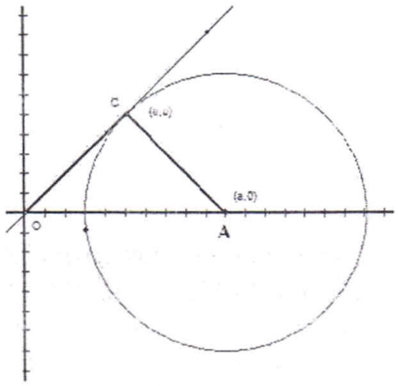
Olimpíada matemática DEPR-CRAIM: Soluciones
3 de abril de 2007

Instrucciones: *Resuelva un problema por hoja. Explique todo su trabajo.*

1 Determine la condición del número real a para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga una sola solución:

$$\begin{aligned} (x-a)^2+y^2 &= 1 \\ y &= x \end{aligned}$$

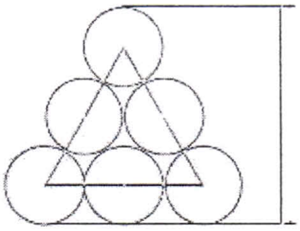
Determine la solución en tal caso.



Solución: En la figura se ha trazado la gráfica de la ecuación

$$(x-a)^2+y^2=1$$

que es una circunferencia de radio 1 con centro $A=(a,0)$. Además se ha trazado la gráfica de $y=x$. Claramente, para que haya una sola solución del sistema de ecuaciones, la recta debe ser tangente a la circunferencia en un punto C, el cual, por estar en la recta, tiene coordenadas (u,u) para algún número real u. Esta claro que el ángulo COA del triángulo COA es de $45°$, de modo que el triángulo es isósceles. Por el teorema de Pitágoras $a=\sqrt{2}$ y $u=\sqrt{2}/2$. Como a podría ser negativo y el centro de la circunferencia podría estar en el eje negativo de x, vemos que la solución es única si $a=\pm\sqrt{2}$ y $u=\pm\sqrt{2}/2$. Las soluciones son $x=y=\pm\sqrt{2}/2$.



2 El "triángulo" de la figura consiste de círculos que tienen el mismo radio r. La altura del "triángulo" es 2. ¿Cuál es el valor exacto de r?

Solución: En la figura tenemos un triángulo equilátero verdadero de lado $4r$, cuya altura es,

$$h = 4r\sin(60°) = 2r\sqrt{3}.$$

Otra manera, por el teorema pitagórico,

$$h = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = \sqrt{16r^2 - 4r^2} = \sqrt{12r^2} = 2r\sqrt{3}.$$

Así que,

$$\begin{aligned} h + 2r &= 2 \\ 2r\sqrt{3} + 2r &= 2 \\ 2r\left[\sqrt{3} + 1\right] &= 2 \\ r &= \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \end{aligned}$$

3 El promedio de tres números es 10 más que el número menor y 15 menos que el número mayor. Si el promedio de los números es 5, determine el número mayor.

Solución:

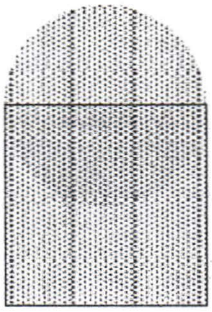
Sean los números x, y, z siendo x el menor y z el mayor. De acuerdo al problema

$$\begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} &= 5, \\ x + 10 &= 5 \text{ y} \\ z - 15 &= 5. \end{aligned}$$

De las últimas dos ecuaciones se concluye que $x = -5$ y $z = 20$. Por lo tanto

$$\frac{-5 + y + 20}{3} = 5,$$

es decir, $y = 0$.

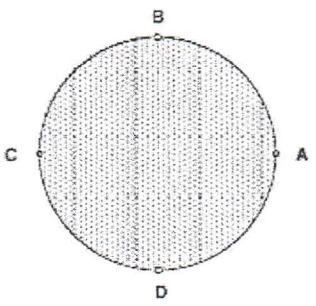


4 Una ventana formada por un semicírculo y un cuadrado está representada en la figura. ¿Cuál es el radio del semicírculo si el área total de la ventana es 1 m^2? Explica.

Solución:

Si r es el radio del semicírculo, entonces el cuadrado tiene lado $2r$. El área total es $\frac{1}{2}\pi r^2 + (2r)(2r) = \frac{\pi r^2}{2} + 4r^2$. Así que,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi r^2}{2} + 4r^2 &= 1 \\
r^2\left[\frac{\pi}{2} + 4\right] &= 1 \\
r^2 &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4} \\
r^2 &= \frac{2}{\pi + 8} \\
r &= \sqrt{\frac{2}{\pi + 8}}
\end{aligned}$$



5 Rosa quiere trotar en una pista circular por una hora. Ella empieza en A y alcanza B en 10 minutos. Entonces ella dobla su velocidad y continua a esa velocidad. Al final de la hora, ¿en cuál punto estará? Explica.

Solución:
La velocidad inicial de Rosa es de $\frac{1/4}{10} = \frac{1}{40}$ circunferencias por minuto. Luego de alcanzar el punto B por primera vez su velocidad será de $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$ circunferencias por minuto. En fin, la distancia total recorrida por Rosa es

$$\left(\frac{1}{40}\ \text{circ/min}\right)(10\ \text{min}) + \left(\frac{1}{20}\ \text{circ/min}\right)(50\ \text{min}) = 8 + \frac{3}{4}\ \text{circunferencias.}$$

Así que, al cabo de una hora Rosa estará en el punto D.

6 Considere la sucesión de enteros positivos con signos alternantes,

$$1, -2, 3, -4, \cdots \text{(el término } n \text{ es } (-1)^{n+1} \cdot n).$$

Determine la suma de los primeros 200 términos de la sucesión.

Solución:

Note que si agrupamos los términos en pares tenemos:

$$\begin{aligned}(1-2)+(3-4)+\cdots(199-200) &= 1 - -1 \cdots - 1 \text{ (100 veces)}\\ &= -100\end{aligned}$$

Otra solución:

La suma es $1 - 2 + 3 - \cdots - 198 + 199 = \sum_{n=1}^{200}(-1)^n \cdot n$. Considerando por separado los términos de la suma pares o impares, tenemos:

$$\begin{aligned}1+3+\cdots+199 &= \sum_{n=1}^{100}(2n-1)\\ &= 2\cdot\sum_{n=1}^{100} n - 100\\ &= 2\cdot\frac{100(101)}{2} - 100\\ &= 50(99),\\ -2-4-\cdots-200 &= -2\sum_{n=1}^{100} n\\ &= -2\frac{100(101)}{2}\\ &= -50(101).\end{aligned}$$

Sumando estas dos cantidades vemos que el valor de la suma es $-50(2) = -100$.

7 Determine el valor de la suma de los dígitos de la expansión decimal de $2^{1999} \cdot 5^{2002}$.

Solución:

Note que

$$2^{1999} \cdot 5^{2002} = 2^{1999} \cdot 5^{1999} \cdot 5^3 = 125 \times 10^{1999}.$$

Por lo tanto, la suma de los dígitos es $1 + 2 + 5 = 8$ ya que los 1999 ceros no afectan el valor de la suma.

8 Si $a+b+c=7$ y

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}.$$

¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$? Explique.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{7-(b+c)}{b+c}+\frac{7-(c+a)}{c+a}+\frac{7-(a+b)}{a+b}\\
&= \frac{7}{b+c}-1+\frac{7}{c+a}-1+\frac{7}{a+b}-1\\
&= 7\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]-3\\
&= 7\left[\frac{7}{10}\right]-3\\
&= \frac{49}{10}-\frac{30}{10}\\
&= \frac{19}{10}
\end{aligned}$$

9 Si el entero de cuatro dígitos $5ab4$ es un cuadrado perfecto. Encuentre el valor de $a + b$. Explique.

Solución:

Sea $N = 5ab4$. Note que, $70^2 = 4900$ y $80^2 = 6400$. Así que,

$$70 < \sqrt{N} < 80.$$

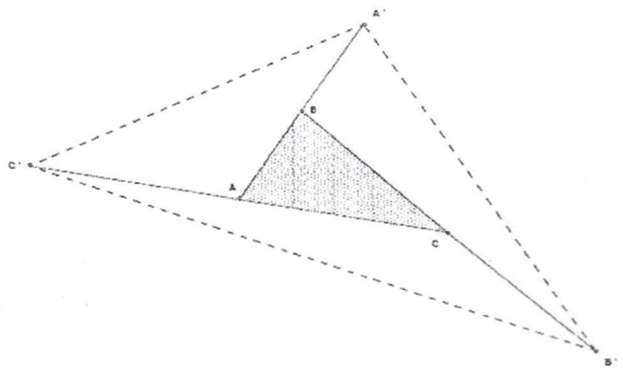
Examinando las posibles raíces cuadradas de N,

$$\begin{aligned}
71^2 &= 5041 \\
72^2 &= 5184 \\
73^2 &= 5329 \\
74^2 &= 5476 \\
75^2 &= 5625 \\
76^2 &= 5776 \\
77^2 &= 5929 \\
78^2 &= 6084
\end{aligned}$$

Por lo tanto $N = 5184$ y $a + b = 9$.

10 El triángulo $\triangle ABC$ tiene un área de 25 cm^2. Si formamos un triángulo más grande $\triangle A'B'C'$ como se indica y sabiendo que las longitudes $A'B = AB$, $CB' = BC$ y $C'A = AC$, ¿cuál es el área del triángulo $\triangle A'B'C'$? Explique.

Solución:



Sean α, β, γ los ángulos en el triángulo $\triangle ABC$ cuyos vértices son A, B, C respectivamente y sean a, b, c los lados en el triángulo $\triangle ABC$ opuestos a los vértices son A, B, C respectivamente. Recuerde que en un triángulo arbitrario el área es igual a la mitad del producto de cualquier par de lados multiplicado por el seno del ángulo incluido. Así que el área del triángulo $\triangle AA'C'$ es

$$\frac{1}{2}(b)(2c)\sin(180^\circ - \alpha) = bc \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = bc \cdot \sin(\alpha).$$

De otro lado, sabemos que el área de $\triangle ABC$ es 25 cm^2. Utilizando la fórmula de área de los dos lados y el ángulo incluido es este caso, obtenemos

$$\frac{1}{2}(b)(c)\sin(\alpha) = 25.$$

Por lo tanto, el área del triángulo $\triangle AA'C'$ es $bc \cdot \sin(\alpha) = 50$ cm^2. Con argumentos similares, obtenemos el área de $\triangle BB'A'$ que es 50 cm^2 y el área de $\triangle CC'B'$ que también es 50 cm^2. En fin, sumando las áreas de los triángulos, obtenemos que el área del triángulo $\triangle A'B'C'$ es 175 cm^2.